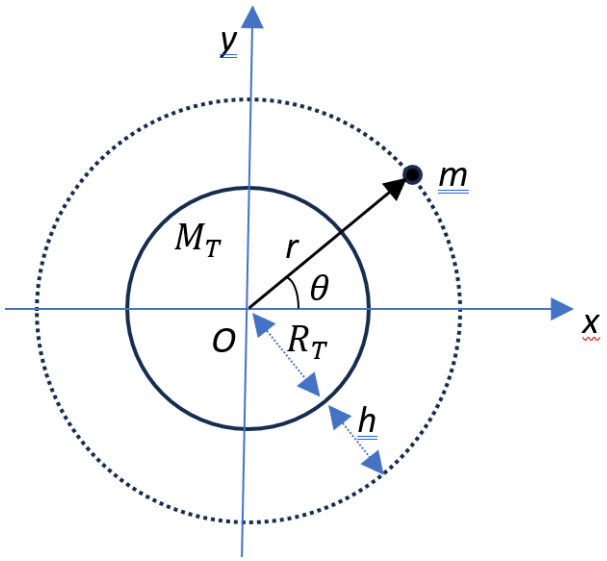
Exercice supplémentaire : Mouvement d'un satellite :



Un satellite de masse m = 300 kg se déplace sur une orbite circulaire autour de la Terre à une hauteur h = 400 km du sol terrestre. Le rayon terrestre vaut R_T = 6400 km. Au temps t, il est localisé au point M de coordonnées polaires (r, ϑ) comme le montre la figure. L'origine des axes O se situe au centre de la Terre.

1. Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées polaires.
2. Donner l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ en coordonnées polaires en utilisant le fait que le rayon r est constant, ainsi que sa norme.
3. Donner l'expression du vecteur accélération.
4. Donner l'expression de la force gravitationnelle qui s'exerce sur le satellite.
5. En appliquant le PFD, donner l'expression du vecteur l'accélération.
6. En utilisant les équations établies précédemment, montrer que $\dot{\theta} = \omega$ est constant, puis montrer que la norme du vecteur vitesse peut s'écrire : $\|\vec{v}\| = v = r\omega$.
7. Montrer que la norme du vecteur accélération peut s'écrire : $\|\vec{a}\| = a = \frac{v^2}{r}$.
8. En utilisant les résultats précédents, déterminer v en fonction de G, M_T, et r. ($G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg² et $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg.)
9. Donner l'expression de la période T de révolution du satellite. Calculer sa valeur en heures.

1. Le vecteur position vaut :

$$\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r}$$

2. Le vecteur vitesse vaut :

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r.\overrightarrow{u_r})}{dt} = \frac{dr}{dt}.\overrightarrow{u_r} + r.\frac{d\,\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = r.\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

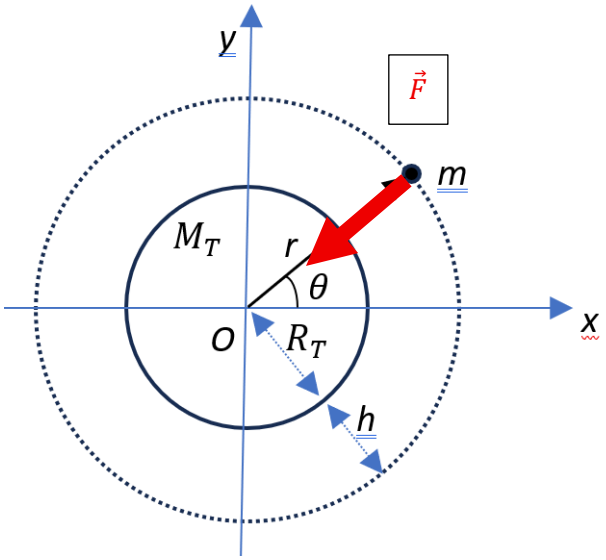
$$\left\|\overrightarrow{v(t)}\right\| = r.\dot{\theta}$$

3. Le vecteur accélération vaut :

$$\overrightarrow{a(t)} = (-r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}$$

4. La force gravitationnelle vaut :

$$\vec{F} = -G.\frac{m.M_T}{(R_T+h)^2}\,\overrightarrow{u_r}$$



5. D'après le PFD :

$$\sum_i \overrightarrow{F_i} = m\vec{a}$$

$$-G.\frac{m.M_T}{R_T^2}\overrightarrow{u_r} = m\vec{a} = -m(r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + m(r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}$$

6. Il n'y a aucune composante sur $\overrightarrow{u_\theta}$ donc

$$(r\ddot{\theta}) = 0$$

Soit :

$$\dot{\theta} = cte = vitesse\ angulaire = \omega$$

En remplaçant dans l'expression de la vitesse :

$$\left\|\overrightarrow{v(t)}\right\| = r.\omega$$

7. On peut donc écrire le vecteur accélération :

$$\vec{a} = -(r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r}$$

Soit :

$$\|\vec{a}\| = \left(r\dot{\theta}^2\right) \;\; = r.\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

8. On peut maintenant écrire :

$$G.\frac{m.M_T}{(R_T+h)^2} \; = m\frac{v^2}{(R_T+h)}$$

Et avec r = $(R_T + h)$

$$v^2 = \; G.\frac{M_T}{R_T}$$

$$v \; = \sqrt{G.\frac{M_T}{(R_T+h)}}$$

9. Le temps de rotation vaut :

$$T = \frac{d}{v} = \frac{2\pi(R_T+h)}{v} = \frac{2\pi(R_T+h)}{\sqrt{G.\frac{M_T}{(R_T+h)}}} = 1{,}54h$$